



## Gráficos e interpretações gráficas

Prof. Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

### Descrição

Interpretação de gráficos e seus principais pontos.

### Propósito

Reconhecer que, no cotidiano, muitas quantidades dependem de uma ou mais variáveis; portanto, o conceito de gráfico das funções torna-se essencial ao profissional, pois os gráficos fazem parte da comunicação e conseguem, muitas vezes, passar informações independentemente de idiomas locais.

### Preparação

Este conteúdo tem como pré-requisito o entendimento das operações com números. Antes de iniciar seus estudos, tenha em mãos uma calculadora científica ou use a calculadora de seu smartphone ou computador.

## Objetivos

Módulo 1

## Conceitos de intervalos

Interpretar os conceitos básicos de intervalo.

Módulo 2

## Caracterização do plano cartesiano

Identificar pontos no plano.

Módulo 3

## Definição e características da função

Interpretar as informações contidas em um gráfico.

Módulo 4

## Máximos, mínimos e raízes de uma função

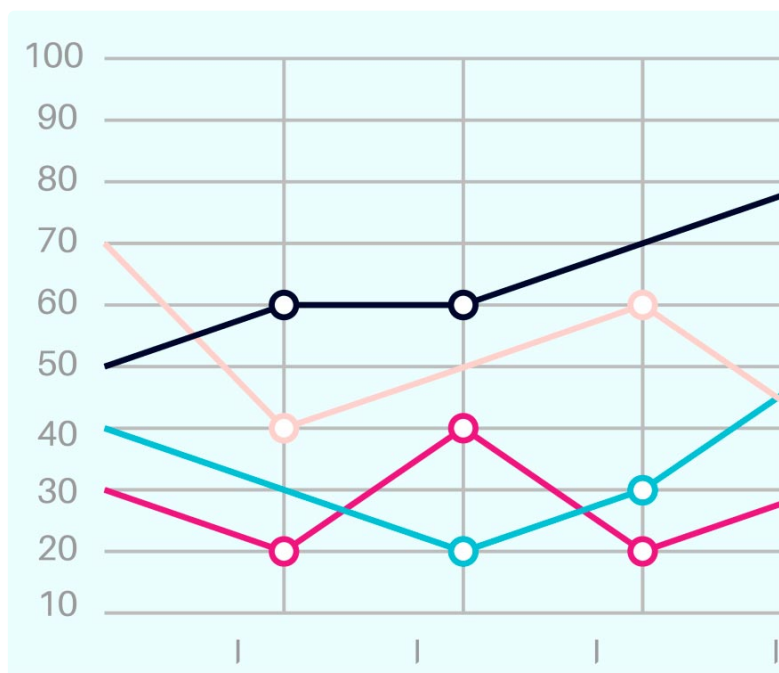
Identificar pontos notáveis de um gráfico.



## Introdução

A matemática é uma linguagem que permite analisar e descrever diversas situações. Este conteúdo apresenta as funções a partir de conceitos elementares, como: intervalos, pontos e plano cartesiano, e contribui para o entendimento das funções, correlacionando-as a uma lista ou tabela em que o plano cartesiano não é nada além do objeto de manifestação gráfica de seus resultados.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## 1 - Conceitos de intervalos

Ao final deste módulo, você será capaz de interpretar os conceitos básicos de intervalo.

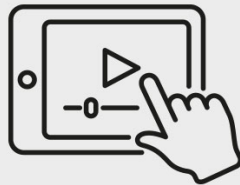
# Intervalos



# Intervalos reais

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo a este vídeo. Vamos lá?

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



No decorrer deste tema, os intervalos merecem destaque. Será necessário que você analise situações gráficas e localize os melhores momentos – os intervalos – para possíveis intervenções.

## A palavra intervalo nos remete a uma forma de medir.

Quando consideramos o intervalo das 9 às 11 horas, temos todos os minutos, segundos e qualquer subdivisão de tempo compreendida nesse período.

No contexto matemático, os intervalos são subconjuntos do conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ .

### Exemplo

Todos os valores entre 3 e 5.

Isso significa, por exemplo, que o número irracional  $\pi$  (pi), que é aproximadamente 3,14, pertence a esse intervalo, bem como o número 4, pois eles são maiores que 3 e menores que 5.

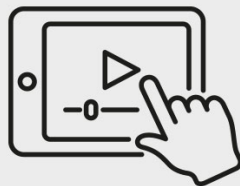
É claro que você pode usar a língua portuguesa para descrever tais conjuntos, mas a Matemática também é uma linguagem com características próprias, que serão abordadas ao longo deste tema.

## Conceitos

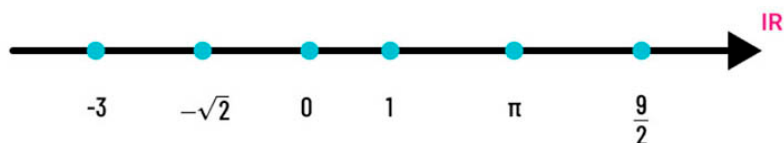


# Classificando intervalos na reta numéricas

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Intuitivamente, ao pensar em números reais, você deve imaginar uma reta infinita, onde cada ponto dela é um número real. Esse objeto será chamado de **Reta Real** e admite o símbolo  $\mathbb{R}$ . Essa reta é organizada de forma crescente do menos infinito ( $-\infty$ ) ao mais infinito ( $+\infty$ ).



Reta Real.

Dessa forma, é importante destacar que:

**Um intervalo é um subconjunto dos números reais.**

Para uma representação gráfica desse conceito, adotaremos a seguinte notação:



## Bola fechada

Indica que o extremo do intervalo **está contido** no conjunto.



## Bola aberta

Indica, em nossa representação, que o extremo do intervalo **não está contido** no conjunto.

Dessa forma, o intervalo, que pode ser visto na imagem a seguir, compreende todos os números reais de *1* até *6*, *excluindo o 1* e *incluindo o 6*.



## Transferindo a linguagem

Quando tratarmos do conjunto dos números reais, os símbolos:

### Bola Fechada



É representada por:

$\geq$  (maior ou igual) e  $\leq$  (menor ou igual) ou  $[ ]$  (colchetes)

Se  $x \in \mathbf{R}$  e  $-4 \leq x \leq 2$ , isso significa que  $x$  pode ser maior que  $-4$  ou igual a  $-4$  e menor que  $2$  ou igual a  $2$ ; portanto, dentro do intervalo.



Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma:  $[-4, 2] = \{x \in \mathbb{R}; -4 \leq x \leq 2\}$  Ou seja, todos os números reais **a partir** do número  $-4$  até o número  $2$ . Um intervalo que possui as extremidades é chamado de intervalo fechado.

#### Bola Aberta



É representada por:

$>$  (maior) e  $<$  (menor) ou  $( )$  (parênteses) ou  $]$  colchetes  $[$

Se  $x \in \mathbb{R}$  e  $-4 < x < 2$ ,  $x$  pode ser maior que  $-4$  e menor que  $2$ . Portanto, os extremos não fazem parte do conjunto.



Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma:  $]-4, 2[ = \{x \in \mathbb{R}; -4 < x < 2\}$  Ou seja, todos os números reais depois do número  $-4$  anteriores ao número  $2$ . Um intervalo que não possui as extremidades é chamado de intervalo aberto.

A **amplitude de um intervalo** é sempre definida por:

$$\text{Amplitude} = LS - LI$$

Onde:

**LS = Limite superior do Intervalo**

**LI = Limite inferior do intervalo**

Portanto, nos **casos anteriores**, podemos calcular a **amplitude** do intervalo subtraindo a extremidade mais à direita da extremidade mais à esquerda:

$$2 - (-4) = 6$$

Isto é, nos **dois casos**, o **intervalo** possui a **amplitude** de **6 unidades**.

Você deve estar se perguntando:

**Mesmo com os intervalos abertos, onde as extremidades não estão incluídas, a amplitude é a mesma dos intervalos fechados?**

A resposta é **sim!**

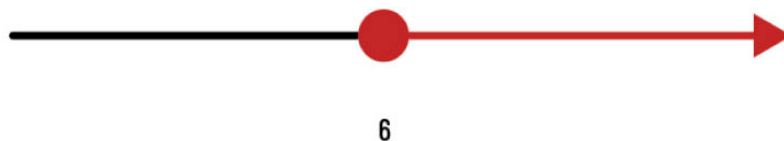
Isso acontece porque, mesmo nos intervalos abertos, é possível pensar que podemos ficar bem perto do limite aberto. Na verdade, podemos ficar “infinitamente” perto de um limite aberto. Logo, a amplitude (também traduzida na figura como o comprimento do trecho da reta) será igual se o limite for fechado ou aberto.

Agora, vamos entender as setas.

### Exemplo

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 6$$

$x$  pode ser maior que 6 ou igual a 6 e, portanto, estará dentro do **intervalo**.



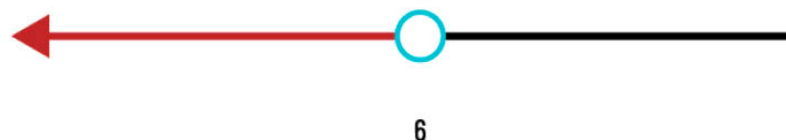
## Intervalo

### Exemplo

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } x < 6$$

isso significa que  $x$  pode ser apenas menor que 6, e nunca igual a 6; portanto, **6 não está dentro** do intervalo.





## 6 não está dentro

Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma:

$$(-\infty, 6) = \{x \in \mathbb{R} ; x < 6\}$$

Ou seja, todos os números reais **antes** do número 6. A semirreta que não possui a sua extremidade é denominada **semirreta aberta**.

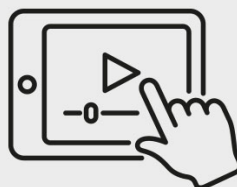
Note que uma semirreta tem a **amplitude infinita**.

## Vamos aplicar o que estudamos até agora?



## Exemplos onde podemos perceber intervalos à nossa volta

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Designaremos os valores de 1 até 12 como os meses do ano, 1 para janeiro, 2 para fevereiro, e assim por diante, até chegarmos a 12 para dezembro.



A partir das informações apresentadas até aqui, tente responder a questão a seguir:



## Atividade discursiva

Caracterize por intervalos o segundo trimestre do ano:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta ▾

O segundo trimestre de um ano contém os meses de abril, maio e junho. No gráfico da reta que temos, consideramos  $1$  para janeiro,  $2$  para fevereiro, e assim em diante. Desse modo, podemos seguir a lógica de  $1$  para janeiro;  $2$  para fevereiro;  $3$  para março;  $4$  para abril;  $5$  para maio;  $6$  para junho;  $7$  para julho; ....;  $12$  para dezembro.

Logo, o segundo trimestre seria o intervalo dos números que representam os meses de abril, maio e junho, que seriam  $4$ ,  $5$  e  $6$ . Portanto, o intervalo do segundo trimestre seria  $[4, 6]$ . Representado pela figura:

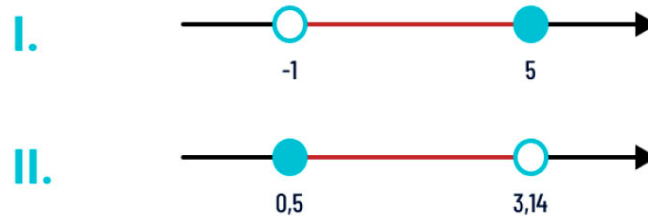


**Falta pouco para atingir seus objetivos.**

**Vamos praticar alguns conceitos?**

**Questão 1**

Considere os intervalos a seguir:



- A  $\{x \in R; -1 < x \leq 5\}$  e  $\{x \in R; 0,5 < x < 3,14\}$
- B  $\{x \in R; -1 < x \leq 5\}$  e  $\{x \in R; 0,5 \leq x < 3,14\}$
- C  $\{x \in R; -1 \leq x \leq 5\}$  e  $\{x \in R; 0,5 < x < 3,14\}$
- D  $\{x \in R; -1 \leq x \leq 5\}$  e  $\{x \in R; 0,5 \leq x \leq 3,14\}$

E  $\{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 5\}$  e  $\{x \in \mathbb{R}; 0,5 < x < 3,14\}$

## Parabéns! A alternativa B está correta.

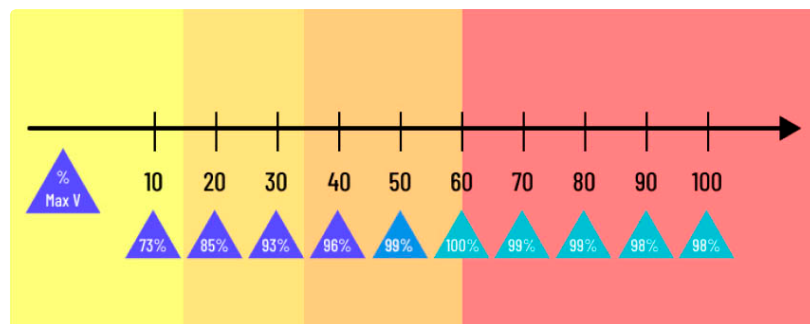
A atividade em questão tem o propósito das associações, isto é,  $>$ ,  $<$  bola aberta e  $\geq$ ,  $\leq$  bola fechada. Assim, devemos procurar a alternativa que contenha aberto em  $-1$ , fechado em  $5$ , fechado em  $0,5$  e aberto em  $3,14$ . A única alternativa com exatamente essa combinação é a letra B.

Vamos apresentar algumas soluções aceitáveis para cada uma das representações.

- a.  $\{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 5\}$  ou os números reais maiores que  $-1$  e menores ou iguais a  $5$  ou os números reais entre  $-1$  e  $5$ , incluindo o número  $5$  ou  $(-1, 5]$ .
- b.  $\{x \in \mathbb{R}; 0,5 \leq x < 3,14\}$  ou os números reais maiores ou iguais a  $0,5$  e menores que  $3,14$  ou os números reais entre  $0,5$  e  $3,14$ , incluindo o número  $0,5$  ou  $[0,5, 3,14[$ .

## Questão 2

Veja, a seguir, o desempenho de um corredor durante uma competição dos  $100$  metros rasos. A reta em questão mostra a marcação da distância na pista e, a cada  $10$  metros, é apresentado o desempenho do corredor em comparação à sua velocidade máxima.



Em qual dos intervalos a seguir o corredor manteve a sua velocidade maior ou igual à de  $99\%$  de sua capacidade máxima.

A  $[50, 80]$

B  $[ 30 , 100 ]$

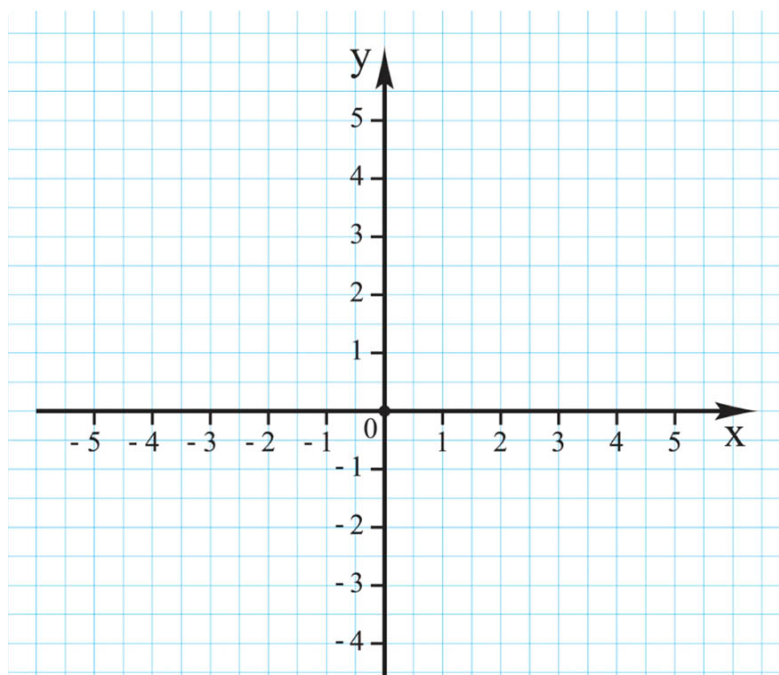
C  $[ 0 , 50 )$  e  $( 80 , 100 ]$

D  $( 59 , 61 )$

E  $[ 50 , \infty )$

**Parabéns! A alternativa A está correta.**

A palavra maior ou igual presume que estamos considerando o valor de 99% em nossa análise. Sendo assim, o intervalo que corresponde ao que foi pedido é a letra A.



## 2 - Caracterização do plano cartesiano

Ao final deste módulo, você será capaz de identificar pontos no plano.

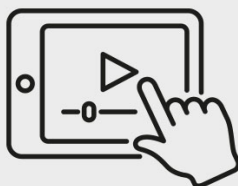
## Plano cartesiano



# Como posicionar pontos no plano cartesiano

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Na vida cotidiana, muitas quantidades mensuráveis dependem de uma ou mais variáveis. Por exemplo: o crescimento das plantas depende da luz solar e das chuvas; a velocidade depende da distância percorrida e do tempo gasto; a tensão elétrica depende da corrente e resistência.

O plano cartesiano é uma das formas mais eficientes para representar o relacionamento entre duas ou mais variáveis.

## Plano cartesiano

O plano cartesiano foi criado com o objetivo inicial de marcar pontos no plano pelo matemático e filósofo René Descartes (1596-1650).

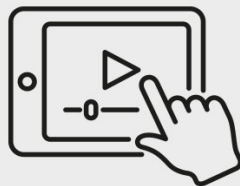
Neste módulo, apresentaremos algumas ideias de como podemos fazer uso dessa ferramenta.

## Conceitos do plano cartesiano

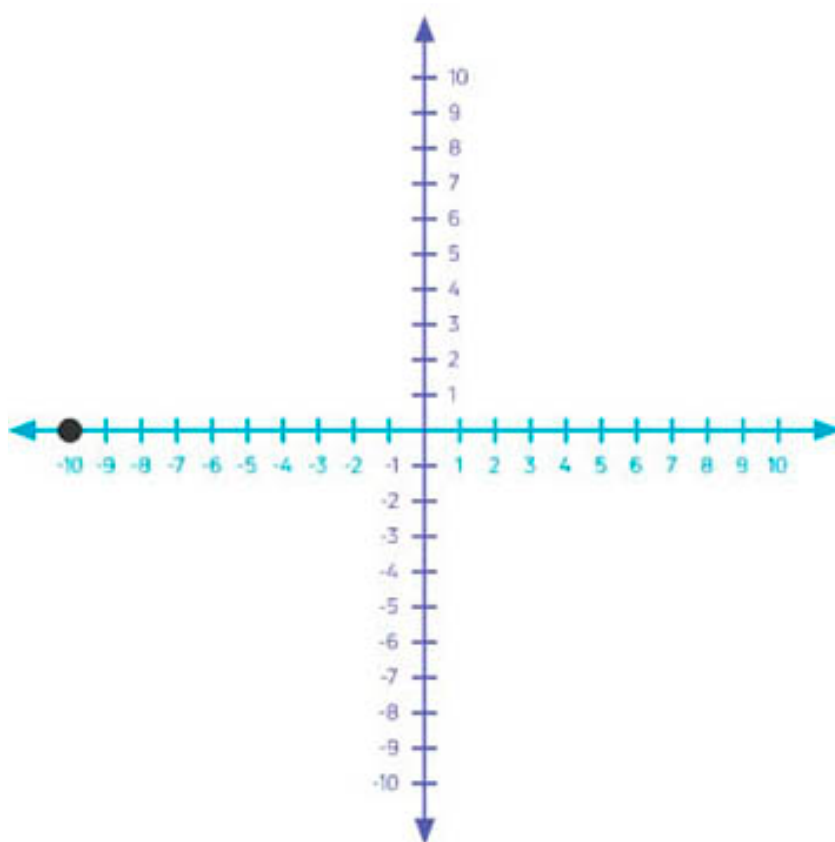


# Entendendo o plano cartesiano, marcando pontos com GeoGebra

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



O plano cartesiano apresenta duas linhas numéricas: uma horizontal, da esquerda para a direita, e outra vertical, de baixo para cima.



Exemplo de plano cartesiano.

Utiliza-se a letra  $x$  para simbolizar os valores sobre a reta horizontal e a letra  $y$  para simbolizar os valores sobre a reta vertical.

Observe que:

À medida que  $x$  aumenta, o ponto se move mais para a direita. Quando  $x$  diminui, o ponto se move mais para a esquerda.

À medida que  $y$  aumenta, o ponto se move mais para cima. Quando  $y$  diminui, o ponto se move mais para baixo.

É importante ressaltar que as retas horizontal e vertical também são chamadas, respectivamente, de "abscissa" e "ordenada". O ponto  $(0,0)$  é chamado de "origem".

As coordenadas são sempre escritas em determinada ordem. A coordenada horizontal vem primeiro. Então, em seguida, vem a coordenada vertical. Isso é chamado de par ordenado.

## Par ordenado

**Par de números em uma ordem especial.**

### Atenção!

Os números são separados por vírgula e, em torno deles, ficam os parênteses.

Como exemplo vamos **marcar os pontos** no **plano cartesiano**:  $(1, -2)$ ;  $(2, 4)$ ;  $(-3, 0)$ ;  $(-1, -2)$ ;  $(0, 5)$ . Em primeiro lugar, precisamos montar uma tabela com os pontos dados:

| $x$  | $y$  |
|------|------|
| $1$  | $-2$ |
| $2$  | $4$  |
| $-3$ | $0$  |
| $-1$ | $-2$ |
| $0$  | $5$  |

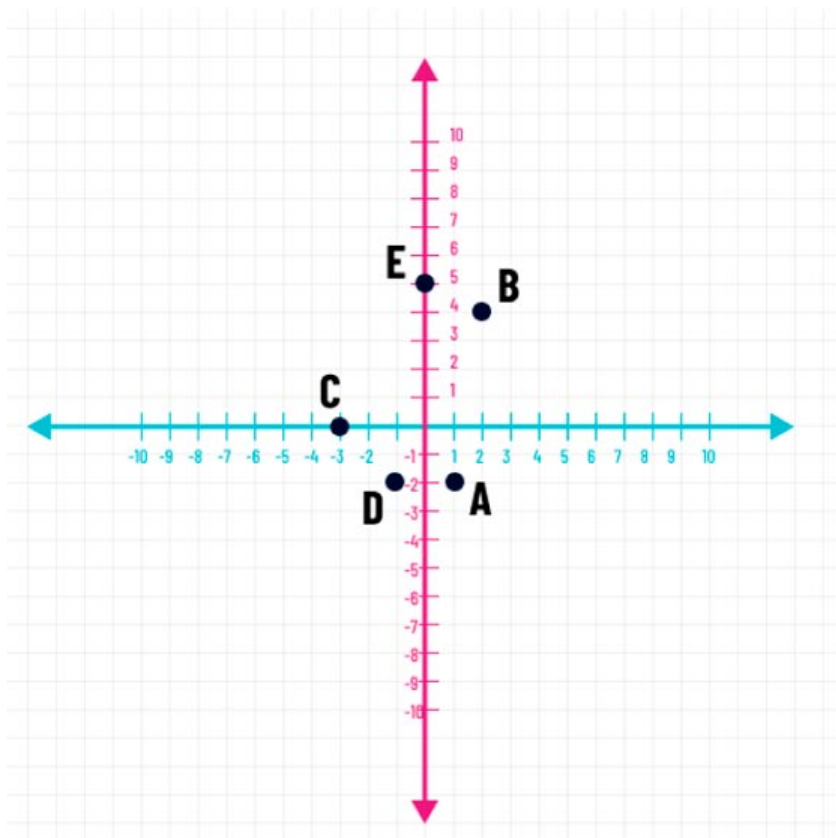
Pares ordenados para pontos no plano cartesiano.  
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

---

É importante perceber que a notação se parece com a de intervalo aberto que aprendemos no Módulo 1. Portanto, você deve se manter atento ao que é pedido no enunciado de cada questão.

Agora, marcaremos as coordenadas no plano cartesiano. Sendo a primeira na reta horizontal, abscissa, e a segunda na vertical, ordenada.





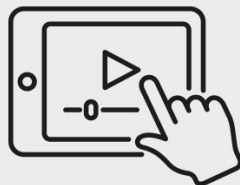
Pontos no plano cartesiano.

Vejamos agora um vídeo sobre a aplicação do conceito de plano cartesiano em robótica.



## Aplicação do plano cartesiano na robótica

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

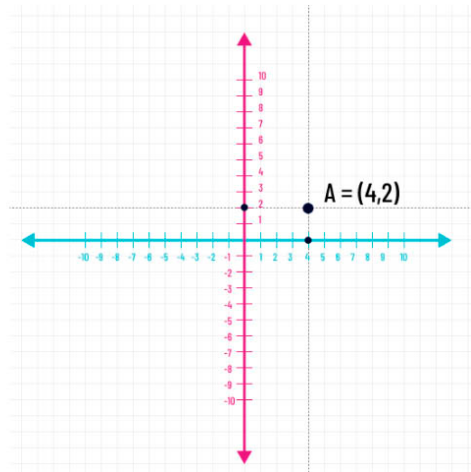


Agora, vamos verificar se você entendeu por meio de uma atividade?



# Atividade discursiva

Na figura a seguir, vemos o ponto  $(4, 2)$ .



Diga o que ocorre se movimentássemos o ponto:

1. Duas unidades para cima.
2. Três unidades para a esquerda e, depois, duas unidades para baixo.

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta ▾

- a. O ponto moveria duas unidades na reta da variável  $y$  para cima. Logo, parou em  $(4, 4)$ .
- b. O ponto moveria 3 unidades para a esquerda, parando em  $(1, 2)$  e, depois, foi deslocado duas unidades para baixo, parando em  $(1, 0)$ .

Saiba mais

Pesquise calculadoras e aplicativos na Internet para representar os pontos no plano cartesiano. O GeoGebra é um exemplo de ferramenta disponível na Internet.

Acabamos de vislumbrar o plano cartesiano como forma de representação gráfica de uma tabela, ilustrando a relação de dois ou mais objetos ou grandezas.

Um gráfico, nessas condições, é uma estrutura matemática bem definida. Em todos os exemplos e nas atividades, vimos que podemos representar pontos em uma tabela e as tabelas no plano cartesiano. Essa associação entre as tabelas e os pontos no plano cartesiano forma a ideia central do módulo 3.

## Falta pouco para atingir seus objetivos.

### Vamos praticar alguns conceitos?

#### Questão 1

A figura abaixo apresenta um gráfico de setores de uma cidade. Esses setores foram divididos de A a H, e de 0 a 3, assim a identificação de um setor pode ser feita da seguinte forma, como exemplo: A0, B3, F2 etc. Considere que todos os setores foram divididos em áreas iguais (considere os retângulos idênticos), e que existe a necessidade de se realizar uma entrega que saia de B0 e chegue em G0. O gráfico abaixo apresentam duas rotas para que seja realizada a entrega.

|   |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|
| A |  |  |  |  |
| B |  |  |  |  |
| C |  |  |  |  |
| D |  |  |  |  |
| E |  |  |  |  |
| F |  |  |  |  |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| G |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |
| H |   |   |   |   |
|   | 0 | 1 | 2 | 3 |

Após observar essas rotas, analise as afirmativas abaixo:

- I. A rota vermelha é a mais longa
- II. A rota verde é a mais curta
- III. A rota vermelha é a mais adequada

Sabendo que a entrega deve ser feita o mais rápido possível, percorrendo a menor distância permitida, assinale a opção correta, sobre a veracidade das afirmações acima:

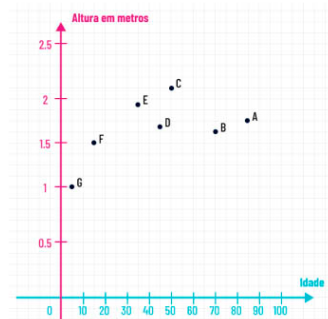
- A I- verdadeira, II- verdadeira, III- falsa
- B I- falsa, II- verdadeira, III- falsa
- C I- verdadeira, II- falsa, III- falsa
- D I- verdadeira, II- falsa, III- verdadeira
- E I- falsa, II- verdadeira, III- verdadeira

**Parabéns! A alternativa A está correta.**

Uma vez que os quadrados possuem áreas iguais e os retângulos são considerados idênticos, o que determina a distância é a quantidade de retângulos pintados. Veja que temos 10 retângulos vermelhos e 7 retângulos verdes, sendo assim, as afirmativas I e II são verdadeiras. Por conta do fato de a entrega ter que ser feita o mais rápido possível, percorrendo o menor caminho, a rota mais adequada é a rota verde, que é mais curta, por isso a afirmativa II é falsa.

## Questão 2

No gráfico abaixo é mostrada a relação da altura de 7 indivíduos, com sua idade:



Relação da altura.

Após observar o gráfico, assinale a opção que apresenta, respectivamente, o indivíduo de maior idade e o indivíduo de maior altura.

A F e G

B A e E

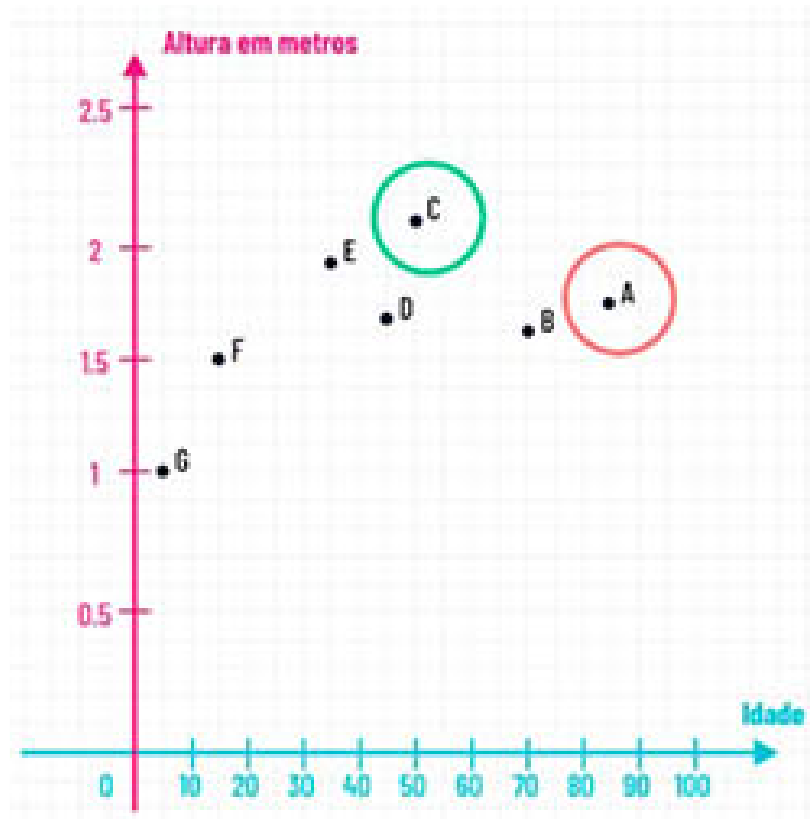
C D e A

D D e C

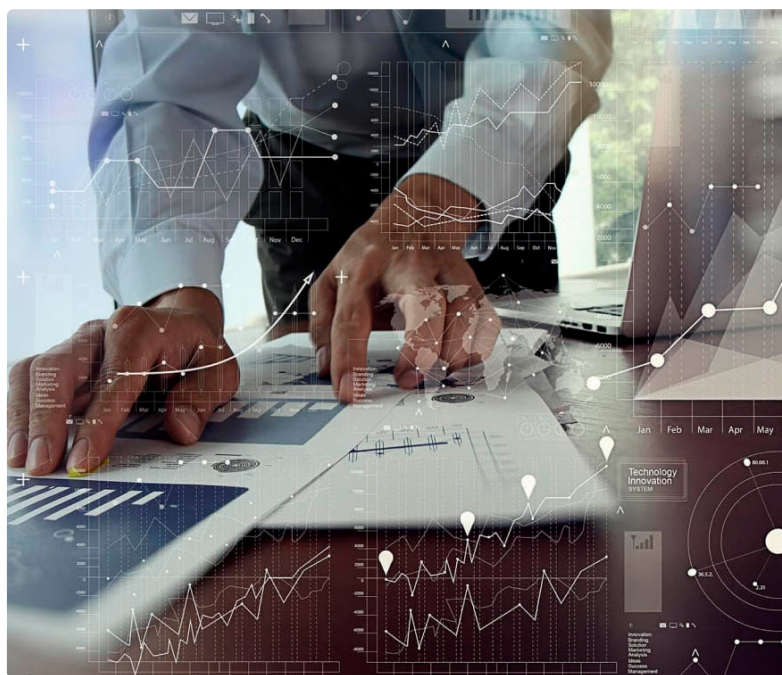
E A e C

**Parabéns! A alternativa E está correta.**

Veja no gráfico que o indivíduo de maior idade é aquele que se localiza mais à direita, como pode ser visto na figura abaixo, com o ponto destacado pelo círculo vermelho. E o indivíduo de maior altura é aquele que se encontra acima de todos os outros, ou seja, o ponto C, que está destacado pelo círculo verde, na figura.



Resposta do exercício.



### 3 - Definição e características da função

Ao final deste módulo, você será capaz de interpretar as informações contidas em um gráfico.

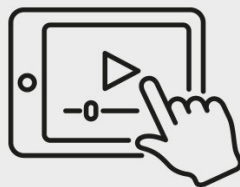
# Vamos começar!



## Exemplo de aplicação do plano cartesiano

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

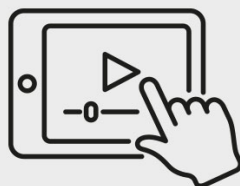


## O que é função?



## Evolução do conceito histórico de funções

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



A palavra **função** apareceu pela primeira vez em um artigo de [Gottfried Leibniz](#), em 1692. Ele chamou de função as **quantidades geométricas variáveis relacionadas** a uma **curva**. No entanto, foi [Daniel Bernoulli](#), em

1718, que definiu o conceito de função de maneira formal pela primeira vez, e se tratava de algo bem diferente do que conhecemos hoje em dia.



Saiba mais



Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*.

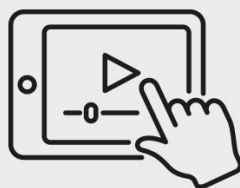
Podemos perceber o conceito de função quando temos duas quantidades ("variáveis") e observamos que há uma relação entre elas. Se acharmos que, para cada valor da primeira variável, existe apenas um valor da segunda variável, dizemos que:

A **segunda variável** é uma função da **primeira variável**.



## Uma função é, a rigor, uma tabela organizada

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



No módulo anterior, vimos que podemos representar tabelas utilizando o plano cartesiano, no qual uma função não é nada além de uma tabela em que todos os valores da primeira coluna estão relacionados aos valores da segunda coluna, sem ambiguidades entre os valores da primeira coluna e os da segunda. É claro que esta não é a definição formal de função, mas, na prática, é o que se deseja. Veremos a seguir alguns exemplos de função.

## Exemplos de função

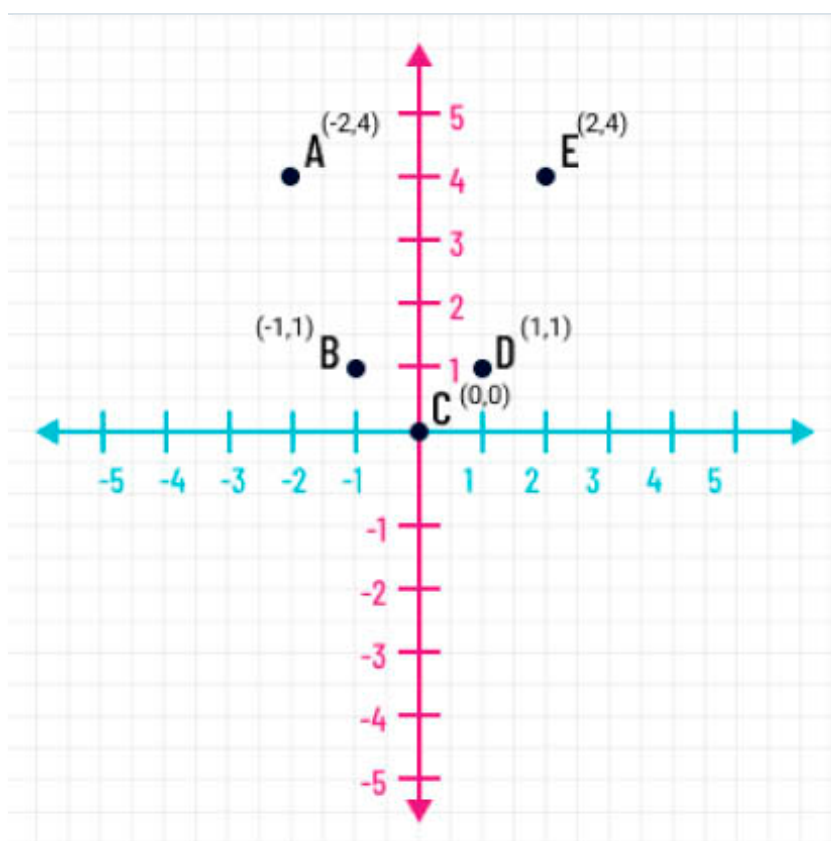
### Exemplo 1

Vamos fazer uma tabela com a seguinte relação: a cada número real  $x$ , associamos o seu valor ao quadrado  $x \times x = x^2$ . A seguir, podemos acompanhar o que ocorre com essa tabela de forma associada ao plano cartesiano.

| Valor de $x$ | Valor de $y = x^2$ |
|--------------|--------------------|
| $-2$         | $4$                |
| $-1$         | $1$                |
| $0$          | $0$                |
| $1$          | $1$                |
| $2$          | $4$                |

Pares ordenados de  $X$  e  $Y$ .

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano.

Os valores da primeira coluna da tabela dependem explicitamente dos valores da segunda.

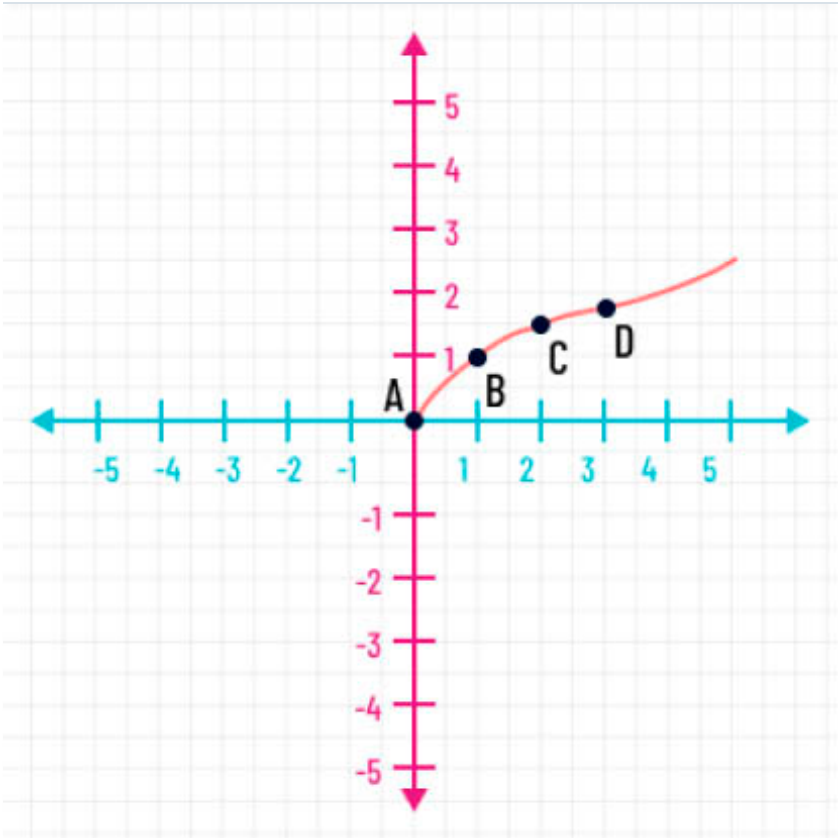
Devido à nossa experiência com o Ensino Médio, é possível ligar os pontos azuis, tendo, assim, melhor compreensão do todo que a tabela poderia nos dar.

Exemplo 2

Desta vez, faremos uma tabela com a seguinte relação: a cada número real  $x$ , associamos sua raiz quadrada  $\sqrt{x}$ .

| Valor de $x$ | Valor de $y = \sqrt{x}$ |
|--------------|-------------------------|
| $-1$         | $i \notin R$            |
| $0$          | $0$                     |
| $1$          | $1$                     |
| $2$          | $\sqrt{2}$              |
| $3$          | $\sqrt{3}$              |
| $3$          | $2$                     |

Pares ordenados de X e Y.  
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano.

Percebemos que  $-1$ , em particular, **não gera valores** em nossa tabela, pois estamos trabalhando apenas com **números reais**.

Note que todo valor **maior ou igual a zero** possui um lugar em nossa tabela. O caso é que os valores **menores que zero** não fazem parte dela.

O maior conjunto de valores admissíveis de uma função, em analogia à primeira coluna de nossas tabelas, é conhecido como domínio da função.

Vejamos a seguir o ultimo exemplo desse grupo.

### Exemplo 3

Qual é o custo de azulejar qualquer parede quadrada, com azulejos quadrados de **10cm (0,1m) de lado**, sabendo que **cada 1m<sup>2</sup>** dos azulejos é **vendido a R\$32** nas Casas Pitágoras?

Para solucionar essa questão, temos de analisar o problema e entender as suas variáveis. Primeiramente, devemos perceber que o metro quadrado depende do comprimento do lado do quadrado. Assim, podemos fazer uma primeira tabela:

| Lado da parede quadrada | Parede em m <sup>2</sup> | Quantidade de azulejos |
|-------------------------|--------------------------|------------------------|
| 1                       | 1                        | 100                    |
| 2                       | 4                        | 400                    |
| 3                       | 9                        | 900                    |
| x                       | x <sup>2</sup>           | 100 × x <sup>2</sup>   |

Informações do exemplo.

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Para preencher a última coluna, basta entendermos quantos azulejos de 0,1m de lado são necessários para preenchermos um metro quadrado. A [figura exemplo](#) ilustra a ideia de um metro quadrado dividido em

azulejos de  $10\text{cm}$  de lado e, como podemos ver, são necessários  $100$  azulejos.

Podemos perceber que a quantidade  $100$  representa o número necessário de azulejos para preencher um metro quadrado de azulejos, que custa  $R\$32$  nas Casas Pitágoras. Sendo assim, existe uma relação de  $100 \rightarrow R\$32$ . Concluimos, então, que a tabela final relaciona a metragem da parede com o custo em azulejos.

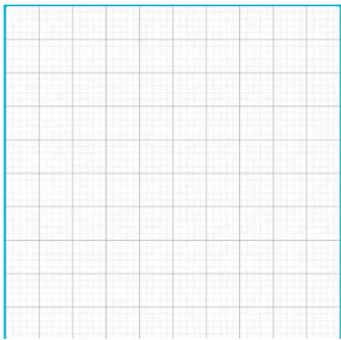
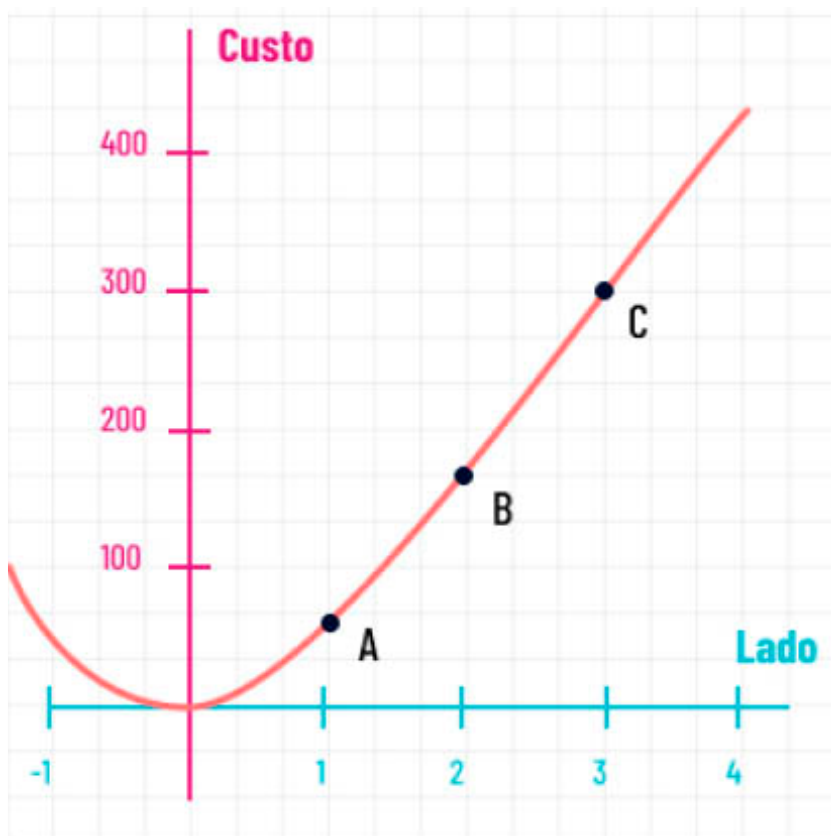


Figura exemplo

| Lado da parede quadrada | Custo em azulejos \$ |
|-------------------------|----------------------|
| 1                       | 32                   |
| 2                       | $32 \times 4$        |
| 3                       | $32 \times 9$        |
| $x$                     | $32 \times x^2$      |

Parede x custo em azulejos.  
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Custo x lado

Daí, a relação que expressa o custo e a metragem da parede é  $Cx = 32 \times x^2$  reais.

## Ambiguidade

Um conceito importante sobre a construção da relação entre uma tabela e a sua representação gráfica é que ela **não pode ser ambígua**, isto é, os valores do que estamos caracterizando por variável dependente **não devem gerar duas possibilidades**.

Vamos entender melhor a questão da ambiguidade e por que ela não é uma função:

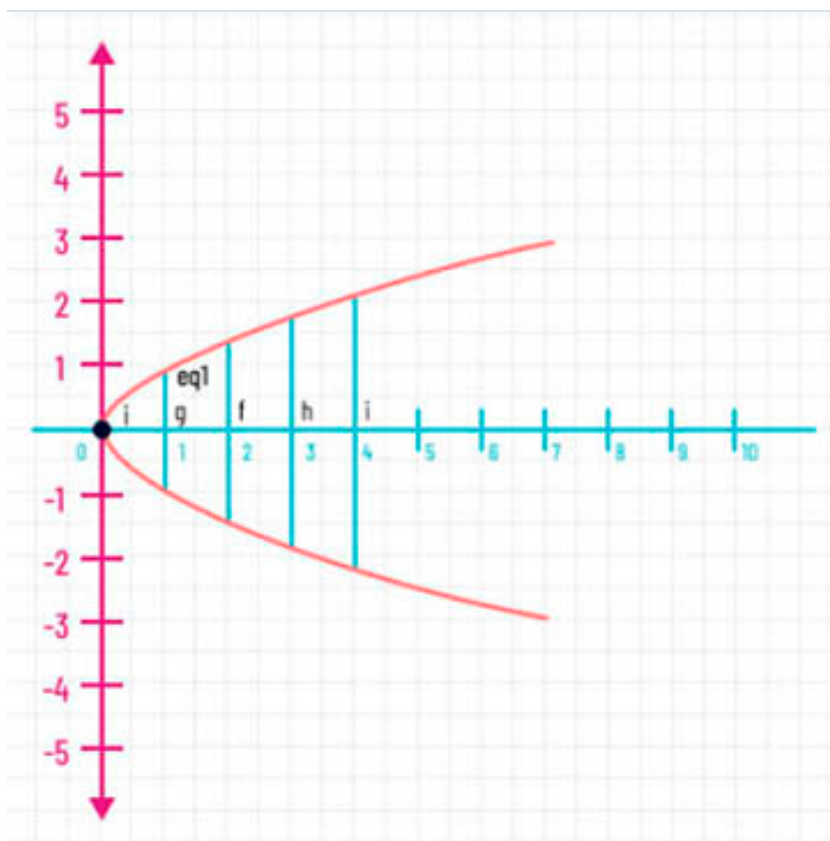
Veja como exemplo uma tabela com as soluções da equação  $y^2 = x$ , onde  $x \in [0, \infty)$ .

| Valores de $x$ | Solução de  |
|----------------|-------------|
| $0$            | $0$         |
| $1$            | $1$ ou $-1$ |

| Valores de $x$ | Solução de                |
|----------------|---------------------------|
| 2              | $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ |
| 3              | $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$ |
| 4              | 2 ou -2                   |

Valores de X.

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Ambiguidade.

Neste exemplo, fica clara a ambiguidade pela **não unicidade das soluções do problema**, deixando-nos o dilema em cada ponto, se estamos considerando a parte positiva ou negativa.

Quando esse tipo de fenômeno ocorrer, diremos que a relação estabelecida **não é uma função**.

Portanto, uma função  $f$  é uma tabela de pares ordenados com a seguinte propriedade: Se  $(x,y)$  e  $(x,b)$  estiverem na **mesma tabela**, então  $b = y$ .

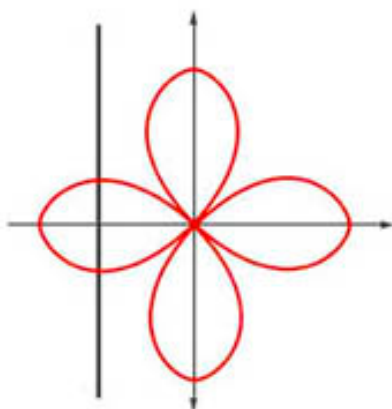
Resumindo

Uma tabela **não pode** conter **pares ordenados distintos** que possuam o mesmo primeiro elemento.

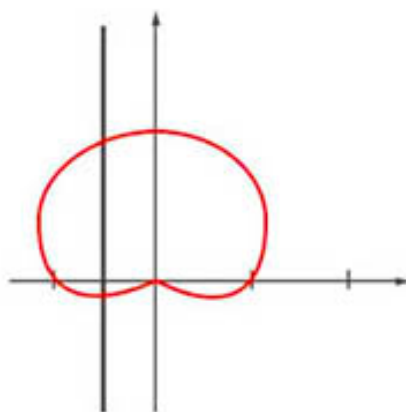
Se  $f$  é uma função, o domínio de  $f$  é: o conjunto de todos os  $x$ , para o qual exista um  $y$ , tal que o par  $(x, y)$  esteja na tabela  $f$ .

Dessa forma, ao observarmos um gráfico no plano cartesiano, o que devemos perceber, a fim de entender se ele representa uma função, é se as **retas verticais** o **tocam** em um **único ponto**.

Veja os exemplos:

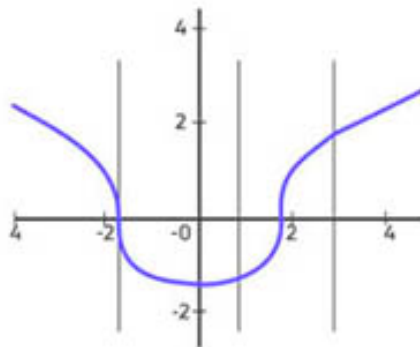


**Não é função**



**Não é função**





## É função

Você já deve ter notado que **sempre associamos** as **tabelas** a uma **figura no plano cartesiano**, que representa todos os pontos possíveis das tabelas em questão.

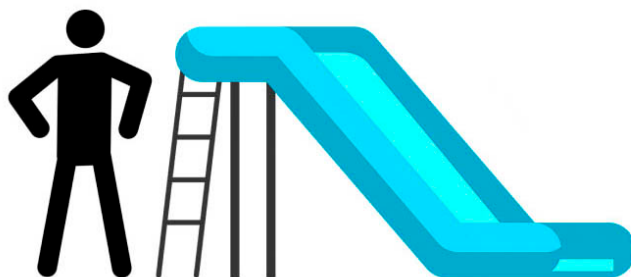
Essas figuras são chamadas de gráficos. Quando as tabelas representarem, de fato, uma função, a imagem será chamada de gráfico de função.

## Reconhecimento e contexto

Agora, apresentaremos uma série de exemplos a fim de que você possa entender que nem sempre podemos, de forma explícita, construir a tabela, embora a relação com o gráfico ainda se faça presente.

## Primeiro exemplo

A ilustração a seguir mostra um homem andando por um brinquedo em um parque:



A partir da imagem acima, pense na seguinte questão:

Quais diferentes medidas podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?



A altura do homem em relação ao solo e sua velocidade variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no primeiro exemplo, tente responder a atividade proposta.



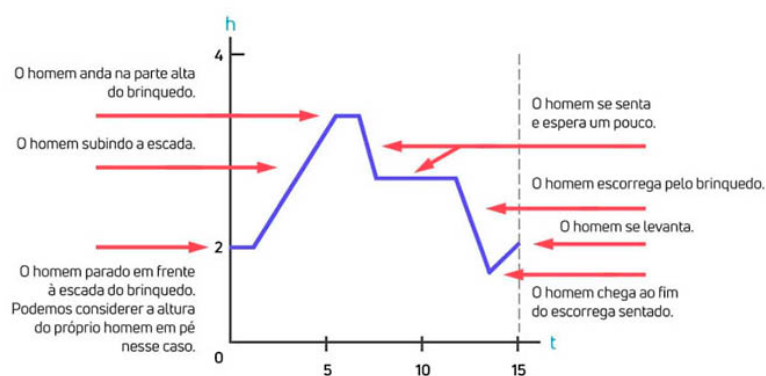
## Atividade discursiva

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta ▾

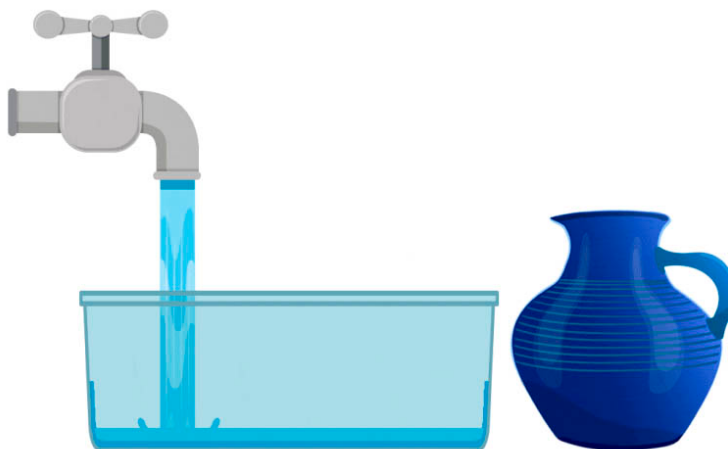
Observe o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.



Altura em função do tempo.

## Segundo exemplo

A ilustração a seguir apresenta um recipiente sendo cheio por água.



A partir da imagem acima, pensa na seguinte questão:

Quais diferentes variáveis podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?



A quantidade de litros de água que está dentro do recipiente e a velocidade em que o recipiente fica cheio variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no segundo exemplo, tente responder a atividade proposta.



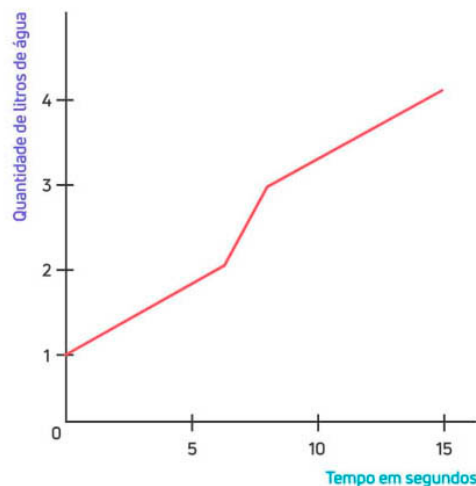
## Atividade discursiva

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da **quantidade de litros de água** no recipiente em função do **tempo**.

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta ▾

Ao analisarmos a ilustração com cuidado, percebemos que já havia água no balde; depois, ele recebe mais um litro de água, além do que já estava entrando, fazendo com que o fluxo de água fosse maior nesse intervalo de tempo, retornando, mais tarde, à vazão natural. Obtemos assim:



Quantidade de litros de água em função do tempo em segundos.

Os gráficos dos exemplos que acabamos de ver representam uma tabela em que a quantidade de água no recipiente ou a altura da cabeça do homem **variam sem ambiguidade em função do tempo**, apresentando, assim, o **conceito de função**.

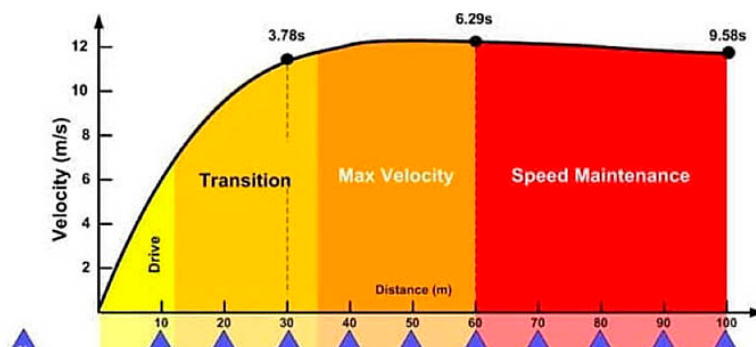
Geralmente, na escola, estudamos funções como fórmulas preestabelecidas. No entanto, como vimos nos exemplos anteriores, essa ideia não é completa. Devemos ser capazes de enxergar o conceito de função na diversidade à nossa volta, conforme os exemplos a seguir:

Exemplo A ▾

A imagem mostra um gráfico do desempenho do corredor Usain Bolt ao conquistar o recorde mundial dos 100 metros rasos, no campeonato mundial de atletismo.

A reta vertical apresenta a velocidade do corredor em metros por segundo (m/s), e a reta horizontal mostra a distância percorrida em metros.

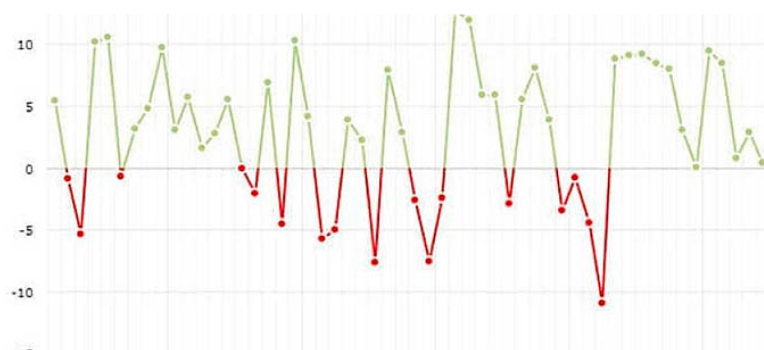
O gráfico é uma função que mede a velocidade do corredor em cada momento da trajetória.



#### Exemplo B

Já esta imagem mostra o crescimento do PIB argentino, do início dos anos 1960 até a década de 2010.

O gráfico apresenta o histórico do desenvolvimento econômico argentino. A partir dele, podemos apresentar uma tendência, auxiliando um futuro investidor.

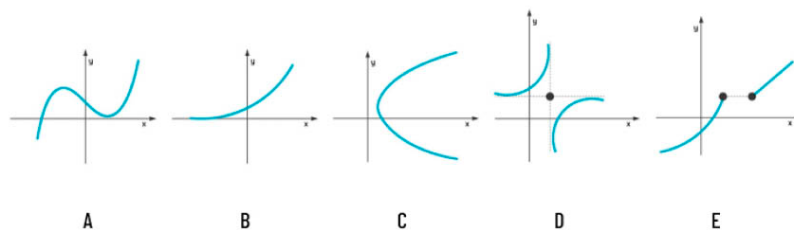


**Falta pouco para atingir seus objetivos.**

**Vamos praticar alguns conceitos?**

### Questão 1

Qual das opções a seguir não apresenta um gráfico de função?



Marque a opção correta:

A      A

B      B

C      C

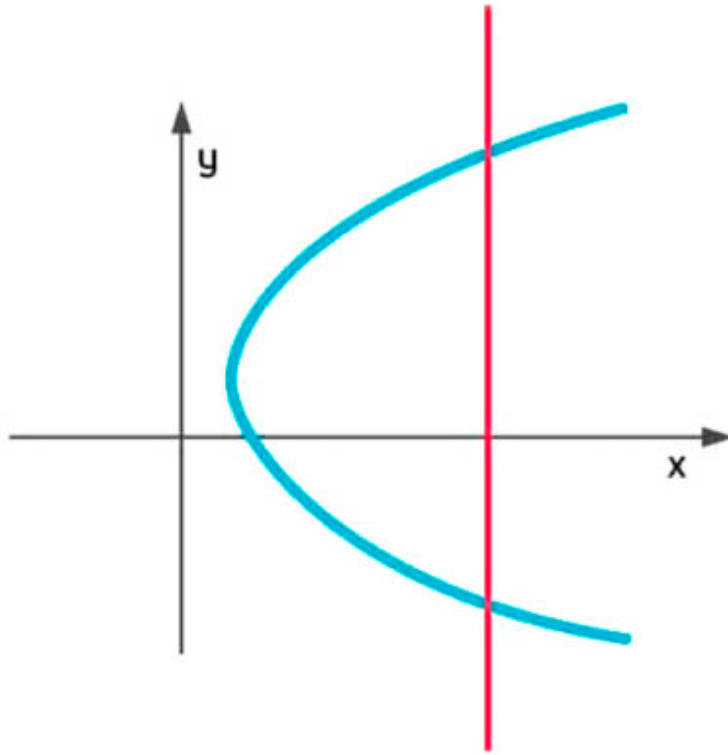
D      D

E      E

**Parabéns! A alternativa C está correta.**

Os itens A, B, D e E são funções, e o item C não é uma função, de acordo com o que foi visto neste módulo, pois a reta vertical toca o gráfico em mais de um ponto.

Em relação à alternativa E, o ponto é que, na “tabela” que apresenta o gráfico, o que ocorreu foi que ela pulou alguns valores. De acordo com a definição de função, podemos entender que, em momento algum, é relatado que não é possível pularmos valores. Sendo assim, o item E não contradiz em nada a definição de função. Logo, também se trata de um gráfico de função.



Alternativa C.

---

## Questão 2

Em 2020, houve uma pandemia global provocada pelo vírus SARS-CoV-2. Tal pandemia trouxe danos incalculáveis às economias globais e provocou milhares de mortes pelo mundo inteiro. O estudo do epidemiologista Neil Ferguson, do Imperial College, apresentou um gráfico mostrando requisitos de leito de cuidados intensivos (UTI) por 100 mil habitantes em diferentes cenários:

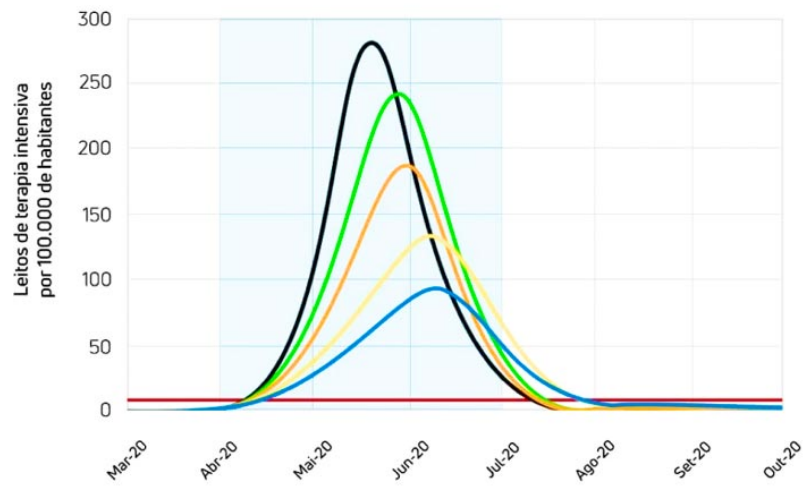


Figura A

- Mostra o número de leitos de UTI por 100 mil habitantes que a Inglaterra possuía em 2019, antes do surto.
- Mostra a epidemia não mitigada.
- Mostra o isolamento do caso.
- Mostra o isolamento dos casos e a quarentena das famílias.
- Mostra uma estratégia de mitigação com o fechamento de escolas e universidades.
- Mostra o isolamento de casos, a quarentena doméstica e o distanciamento social das pessoas com mais de 70 anos.

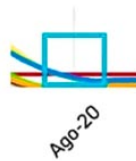


Figura B

Assinale a alternativa correta:

- A Nenhum dos gráficos apresentados nas figuras é função.
- B Os picos em todos os cenários ocorrem em maio.
- C Em todos os cenários, em junho, na Inglaterra, serão necessários 150 leitos de UTI a cada 100 mil habitantes.
- D O sistema de saúde inglês volta ao normal em todos os cenários em agosto.



E Os picos de todos os cenários na Grã-Bretanha ocorrem no mês de junho.

**Parabéns! A alternativa D está correta.**

A letra A é falsa, pois não há ambiguidade nos pontos, portanto todos os cenários são funções.

Para responder se o item B é verdadeiro ou falso, temos duas opções: fazer o recorte do mês de maio ou fazer o recorte dos picos. O mesmo vale pra avaliarmos o item E. Optamos por fazer o recorte dos picos, como ilustra a Recorte A.

O gráfico deixa claro que os picos se concentram durante os meses de maio e junho é não só em maio ou só em junho.

No caso do item C, percebemos que os cenários amarelo e azul não chegam aos 150 leitos de UTI por 100 mil habitantes.

Esse raciocínio evidencia que a resposta é a letra D. O recorte a seguir (Recorte B) deixa claro que em todos os cenários o sistema de saúde inglês volta à normalidade no mês de agosto.



Jun-20

Recorte A



Ago-20

Recorte B

Recorte A e Recorte B.

---



#### 4 - Máximos, mínimos e raízes de uma função

Ao final deste módulo, você será capaz de identificar pontos notáveis de um gráfico.

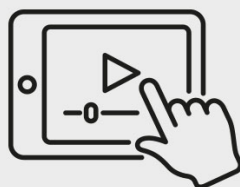
## Vamos começar!



## Exemplos de gráficos de modelos reais

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## Raízes ou zeros

As **raízes ou zeros** de uma função  $f$  **serão os valores no eixo  $OX$** , que também fazem parte da sua função/tabela  $(x, y)$ , onde  $y = f(x)$ . Isto é, correspondem aos valores  $x$  que são associados ao valor zero,  $(x, 0)$ .

Você, provavelmente, encontrará a seguinte representação nos livros de cálculo: são os valores de  $x$  tais que  $f(x) = 0$ .

Graficamente, são os valores da função que se encontram sobre a reta horizontal (eixo  $OX$ ).

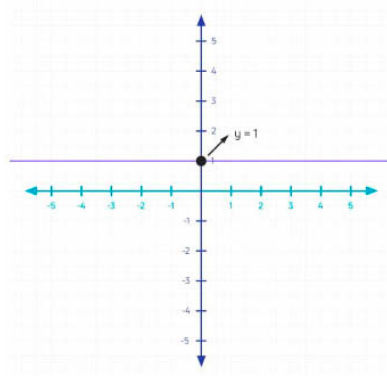
Vejamos alguns exemplos a seguir:

### Exemplo 1



Descreveremos o conjunto das raízes apresentadas no gráfico das funções a seguir.

O gráfico das funções a serem consideradas está em roxo.



Exemplo 1.

Neste gráfico, podemos perceber que o gráfico da função nunca toca o eixo OX.

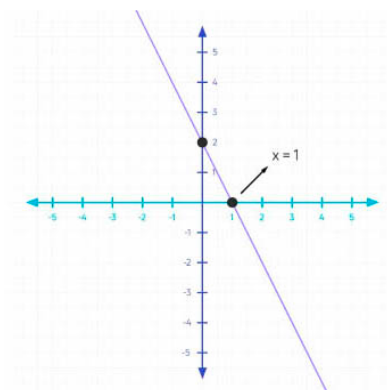
Esse tipo de gráfico é comumente conhecido como gráfico de uma **função constante**.

Sendo assim, o conjunto de todas as suas raízes é **vazio**.

Exemplo 2



As raízes de uma função são os valores da primeira coordenada, cujo gráfico da função  $f$  está sobre o eixo OX.



Exemplo 2.

Neste caso, temos uma única raiz,  $x = 1$ .

Agora que você já compreendeu os exemplos, analise os gráficos a seguir e responda:



## Atividade discursiva

Quais são as raízes das funções a seguir?

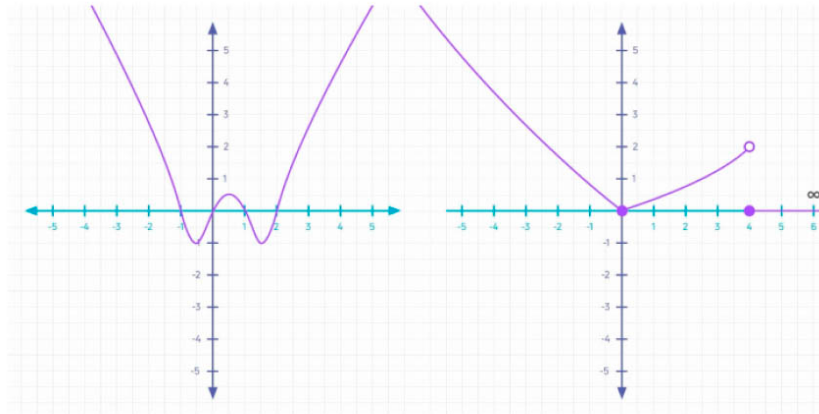


Figura A

Figura B

Função A (esquerda) e Função B (direita).

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta ▾

### Função A:

Podemos ver os valores na reta horizontal que são tocados pelo gráfico da função, isto é,  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .

Dessa forma, temos que a função em questão possui 4 raízes.

### Função B:

Os valores no eixo  $OX$  fazem parte da sua tabela/gráfico da função. Nesse sentido, podemos ver o valor  $x = 0$  e  $x = 4$ .

O caso aqui é que todos os valores de  $x$  maiores que 4 fazem parte da nossa tabela e estão sobre o eixo horizontal. Portanto, as

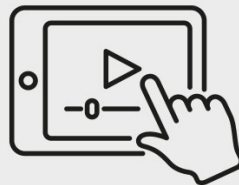
raízes da função dada pelo gráfico são 4 e  $[4, \infty)$ . Ou seja, a função pode ter uma infinidade de raízes.

## Máximos e mínimos de um gráfico



### Reconhecendo máximos e mínimos locais e globais

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Devemos sempre ter em mente que, quando falamos em ponto de máximo ou mínimo de um gráfico, este é um par ordenado, um elemento da nossa tabela, e, por isso, possui **dois valores associados**.

**$(x, y)$**

O momento em que ocorre o evento

A altura do ponto em relação ao eixo  $OX$

O valor de  $x$  é o que geralmente chamamos na literatura de **máximo** ou **mínimo**.

O valor de  $y = f(x)$  é o **valor máximo** ou **valor mínimo**.

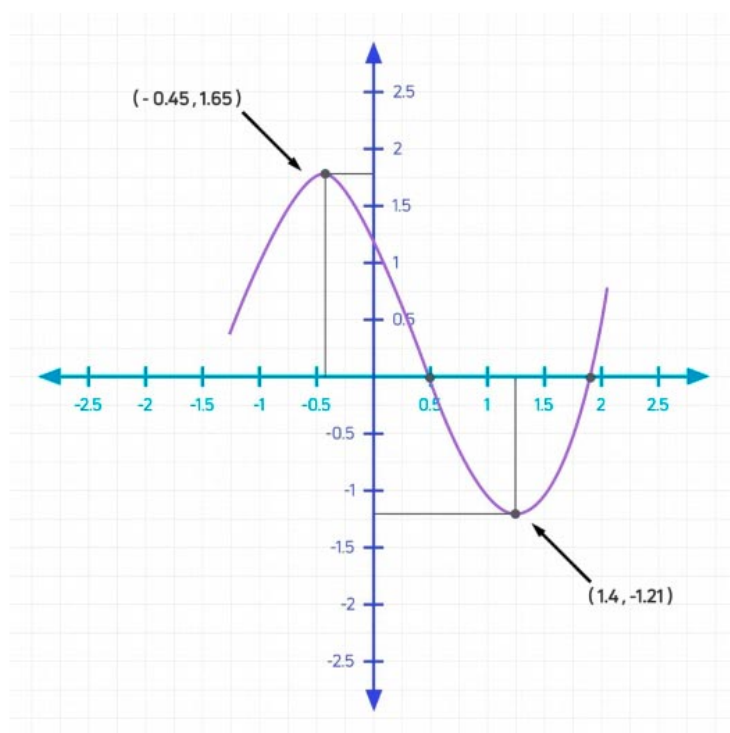
Muitas vezes, podemos nos confundir com o que o problema pede quando essas ideias não estão claras.

**Exemplo**

De acordo com o **gráfico** temos:

O máximo da função ocorre em  $x = -0.45$ , e o seu valor máximo é  $y = f(-0.45) = 1.65$ .

O mínimo ocorre em  $x = 1.4$ , e o seu valor mínimo é  $y = f(1.4) = -1.21$ .



## Gráfico

Trata-se do que chamamos na literatura de **máximos e mínimos globais**.

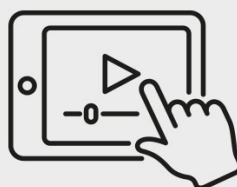
Trata-se do que chamamos na literatura de máximos e mínimos globais.

Dado o gráfico de uma função  $f$ , o ponto de máximo (ou mínimo)  $(x, f(x))$  tem a propriedade de ser o ponto mais alto (ou mais baixo) do gráfico. Em linguagem matemática, é o ponto  $(x_0, f(x_0))$  tal que  $f(x_0) \geq f(x)$  e  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x$  admissível.



## Pontos notáveis de um gráfico

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## Falta pouco para atingir seus objetivos.

### Vamos praticar alguns conceitos?

#### Questão 1

O gráfico abaixo apresenta a taxa de desemprego de 2013.



Taxa de desemprego mensal (em%) - 2013.

Em quais meses há o maior índice de desemprego e o menor índice?

- A Maior índice: dezembro; menor índice: junho.
- B Maior índice: fevereiro; menor índice: setembro.
- C Maior índice: agosto; menor índice: setembro.
- D Maior índice: janeiro; menor índice: setembro.
- E Maior índice: janeiro; menor índice: dezembro.



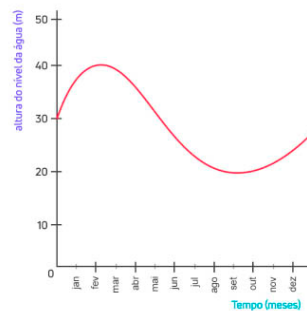
## Parabéns! A alternativa B está correta.

A taxa mais alta do gráfico é 130, ou seja, ponto mais alto do gráfico. Portanto, o maior índice de desemprego ocorre no mês de fevereiro, e o menor índice, em setembro, onde se encontra o ponto mais baixo do gráfico, 90.

### Questão 2

O gráfico a seguir mostra o nível de água em um reservatório durante o ano de 2015.

Se os níveis de água no reservatório dependem dos níveis de chuva na região, assinale, respectivamente, os meses do ano em que mais choveu e em que menos choveu no ano de 2015.



Altura do nível da água (m) em função do tempo (meses).

- A Janeiro e dezembro.
- B Fevereiro e novembro.
- C Março e outubro.
- D Fevereiro e setembro.
- E Janeiro e agosto.

**Parabéns! A alternativa D está correta.**

O mês de fevereiro teve o maior volume de chuvas. Além disso, podemos perceber que, em outubro, choveu mais que em setembro.

## Considerações finais

A Matemática é, a rigor, uma linguagem que permite analisar e descrever diversas situações. Como toda língua, ela possui seus conceitos mais elementares, que abrem caminho para toda a beleza, cultura e os mistérios que circundam civilizações antigas e as mais modernas tecnologias.

Este tema buscou apresentar as funções a partir de conceitos elementares, como intervalos e o plano cartesiano, e desmistificar o entendimento das funções, correlacionando-as a uma lista ou tabela onde o plano cartesiano não é nada além do objeto de manifestação gráfica de seus resultados.



### Podcast

No podcast a seguir, veremos um breve resumo sobre o tema.

Para ouvir o *áudio*, acesse a versão online deste conteúdo.



## Explore +

Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**, de Tatiana Roque.

Pesquise na Internet o projeto **Um livro aberto**, que conta com a colaboração de professores universitários de todo o Brasil.

Pesquise sites de calculadoras científicas e aplicativos que ajudem a fazer contas.

Procure na Internet o livro **Biomechanic of sprinting**.

Consulte o **Portal do Saber**, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

## Referências

CONNALLY, E. *et al.* **Functions Modeling Change: A Preparation for Calculus**. Nova York: Wiler, 2010.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos matemáticos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar I**. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise** – Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SPIVAK, M. **Calculus**: cálculo infinitesimal. Barcelona: Reverté, 1970.

## Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

**O que você achou do conteúdo?**



**Relatar problema**